Olimpiada județeană de matematică, 1 martie 2008
Barem de corectare şi notare, clasa a VI-a

SUBIECTUL 1

Se consideră punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_{10}$ coliniare, în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = 1\ cm,\ A_2A_3 = 2\ cm,\ ...,\ A_9A_{10} = 9\ cm$. Să se calculeze:

a) lungimea segmentului $[A_1A_{10}]$;

b) distanța dintre mijloacele segmentelor $[A_1A_4]$ şi $[A_7A_{10}]$.

prof. Constantin Pătrână, Constanța

Barem de corectare.

a) Avem $1+2+3+...+9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45,$ deci $A_1A_{10} = 45\ cm.$ **(3 puncte)**

b) Notăm cu M şi N mijloacele segmentelor $[A_1A_4]$, respectiv $[A_7A_{10}]$.

Atunci $A_1M = \frac{1}{2}A_1A_4 = 3\ cm$ şi $NA_{10} = \frac{1}{2}A_7A_{10} = 12\ cm$. **(2 puncte)**

În final, $MN = A_1A_{10} - A_1M - NA_{10} = 45\ cm - 3\ cm - 12\ cm = 30\ cm.$
(2 puncte)

NOTĂ:

1. Problemele propuse se pot rezolva şi prin alte metode.
2. Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
3. Nu se acordă fracțiuni de punct.
4. Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Olimpiada județeană de matematică, 1 martie 2008
Barem de corectare şi notare, clasa a VI-a

SUBIECTUL 2

Un număr se numeşte "miraculos" dacă este natural şi este egal cu suma pătratelor a doi divizori distincți ai săi.

a) Să se dea un exemplu de număr "miraculos".

b) Să se arate că există cel puțin 2008 numere "miraculoase".

prof. Marius Damian, Brăila

Barem de corectare.

a) Numărul 20 este "miraculos" deoarece $20 = 2^2 + 4^2$ şi $2, 4 \in D_{20}$. (3 puncte)

b) Pentru fiecare $k \in ¥^*$, avem $20k^2 = (2k)^2 + (4k)^2$ şi cum $2k, 4k \in D_{20k^2}$, obținem o infinitate de numere miraculoase, adică cel puțin 2008. (4 puncte)

NOTĂ:

1. Problemele propuse se pot rezolva şi prin alte metode.
2. Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
3. Nu se acordă fracțiuni de punct.
4. Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

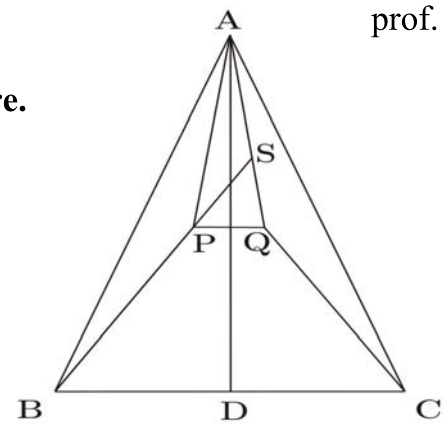
Olimpiada județeană de matematică, 1 martie 2008
Barem de corectare şi notare, clasa a VI-a

SUBIECTUL 3

Fie triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ şi punctele P şi Q în interiorul său astfel încât $AP = PB = AQ = QC$. Dacă $BP \cap AQ = \{S\}$, să se demonstreze că $\sphericalangle SPQ \equiv \sphericalangle QCB$.

prof. Nicolae Stănică, Brăila

Barem de corectare.



Construim $AD \perp BC$, $D \in BC$. Cum triunghiul ABC este isoscel de bază $[BC]$, rezultă că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$. (2 puncte)

$\triangle APB \equiv \triangle AQC$ (L.L.L.) deci $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle QAC$ (1 punct)

Din $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ şi $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle QAC$ rezultă că $\sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle QAD$. (1 punct)

$\triangle APQ$ este isoscel de bază $[PQ]$ şi $[AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle PAQ$, deci $AD \perp PQ$. (1 punct)

Fie $SB \cap AD = \{M\}$.
Avem $\sphericalangle SPQ \equiv \sphericalangle SBC$ (au acelaşi complement, $\sphericalangle BMD$) (1 punct)

Dar $\sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle QCB$ (diferențe de unghiuri corespondente).
Deducem că $\sphericalangle SPQ \equiv \sphericalangle QCB$. (1 punct)

NOTĂ:

1. Problemele propuse se pot rezolva şi prin alte metode.
2. Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
3. Nu se acordă fracțiuni de punct.
4. Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Olimpiada județeană de matematică, 1 martie 2008
Barem de corectare şi notare, clasa a VI-a

SUBIECTUL 4

Despre numerele naturale nenule a, p, q se ştie că $ap+1$ se divide cu q şi $aq+1$ se divide cu p. Demonstrați că:

a) numerele p şi q sunt prime între ele;

b) $a \geq \dfrac{pq-1}{p+q}$.

prof. Elena Drăgan, Rm. Vâlcea

Barem de corectare.

a) Fie $d \in \mathbb{N}^*$ cel mai mare divizor comun al numerelor p şi q. Atunci

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} d \mid p \\ p \mid aq+1 \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid aq+1 \\ d \mid q \Rightarrow d \mid aq \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 1$$

Cum $d \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $d=1$, adică $(p,q)=1$. (3 puncte)

b) Avem

$$\left.\begin{array}{l} p \mid aq+1 \\ p \mid ap \end{array}\right\} \Rightarrow p \mid ap+aq+1$$ (1 punct)

şi

$$\left.\begin{array}{l} q \mid ap+1 \\ q \mid aq \end{array}\right\} \Rightarrow q \mid ap+aq+1$$ (1 punct)

Cum p şi q sunt prime între ele, deducem că

$$pq \mid ap+aq+1,$$ (1 punct)

de unde obținem că

$$pq \leq ap+aq+1 \Leftrightarrow a(p+q) \geq pq-1 \Leftrightarrow a \geq \frac{pq-1}{p+q}.$$ (1 punct)

NOTĂ:

1. Problemele propuse se pot rezolva şi prin alte metode.
2. Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
3. Nu se acordă fracțiuni de punct.
4. Se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.